Serie 7

1. Kompaktheit im euklidischen Raum

Zeige dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ genau dann bezüglich der Standardtopologie $\mathcal{T}_{\text{eukl}}$ kompakt ist wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. ($\mathcal{T}_{\text{eukl}}$ ist durch die euklidische Metrik induziert.)

2. Extremwertsatz

Zeige dass wenn $(E, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum ist und $f \in C(E, \mathbb{R})$, dann existieren $x_1, x_2 \in E$ so dass $\text{Bild}(f) \subset [f(x_1), f(x_2)]$.

3. Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen

Zeige dass jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raums kompakt ist.

4. Kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen

Zeige:

a) Wenn F eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraum $(E, \mathcal{T})$ ist und $x \notin F$, dann existieren disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ so dass $x \in U$ und $F \subset V$.

b) Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraum ist abgeschlossen.

5. Abgeschlossene Abbildungen

Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $(E', \mathcal{T}')$ ein Hausdorffraum ist, dann ist jede stetige Abbildung $f : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ abgeschlossen.

6. Lebesgue Zahl Lemma

Wenn $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von einem kompakten metrischen Raum (E, d) ist, dann

$$\exists \delta > 0 \ \forall B \subset E : \quad \operatorname{diam}(B) < \delta \ \Rightarrow \ (\exists U \in \mathcal{U} : B \subset U).$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{diam}(B) := \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ den *Durchmesser* der Menge $B \subset E$.
Solch eine Zahl δ heisst *Lebesgue Zahl* für die offene Überdeckung $\mathcal{U}$.